Pomoćni papir za polaganje Prostiranja Optičkih Talasa (OF3POT)

Maksvelove jednačine

1° Faradejev zakon:

Diferencijalni oblik: $rot\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$,

Integralni oblik: $\oint_C \vec{E} d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_S \vec{B} d\vec{S}$

2° Amperov zakon:

Diferencijalni oblik: $rot\vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}$,

Integralni oblik: $\oint_C \vec{H} d\vec{l} = \int_S (\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}) d\vec{S}$

3° Gausov zakon:

Diferencijalni oblik: $div\vec{D} = \rho_{SL}$,

Integralni oblik: $\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho_{SL} dV$

4° Konzervacija magnetnog fluksa:

Diferencijalni oblik: $div\vec{B} = 0$,

Integralni: $\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$

Veze između veličina u Maksvelovim jednačinama:

1° $\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M}$, 2° $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$, 3° $\vec{j} = \sigma \vec{E}$

Talasna jednačina progresivnog talasa po električnom polju za homogene, linearne, izotropne sredine:
izvodi se primenjivajem operatora **rot** na prvu Maxwell-ovu jednačinu. Analogna jednačina važi i za magnetno polje i dobija se primenjivanjem operatora **rot** na drugu Maxwell-ovu jednačinu.

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Talasna jednačina za nehomogene, linearne i izotropne:
dobijaju se istim postupkom kao i prethodne, sa razlikom da sada važi:
$(\varepsilon_r = \varepsilon_r(x,y,z) \Rightarrow \varepsilon = \varepsilon(x,y,z))$:

$$grad\left(-\frac{grad\,\varepsilon}{\varepsilon}\vec{E}\right) - \nabla^2 \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) \Rightarrow \nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - grad\left(\frac{grad\,\varepsilon}{\varepsilon}\vec{E}\right)$$

$$\nabla^2 \vec{H} = \mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} - \frac{grad\,\varepsilon}{\varepsilon} \times rot\vec{H}$$

uopšteno:

$$\nabla^2 \psi - \frac{n^2(\vec{r})}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

Rešenje jednačine za homogenu sredinu je oblika:

$$\psi(\vec{r},t)=\psi_0 e^{-j\frac{\omega}{c}n(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)}e^{j\omega t}$$

što je i oblik rešenja jednačine za nehomogenu sredinu, sa dodatkom da je sada indeks prelamanja n funkcija koordinata:

$$n=n(\vec{r})$$

Progresivan talas je onaj talas kod koga važi : $y=f(x\mp v_f t)$, tj. kod koga se premeštaj poremećaja može opisati ovom relacijom. U ovo jednačini, ispred $v_f t$ se uzima "-" ako se talas kreće u smeru x-ose, a "+" ako se ne kreće u smeru x-ose.

<u>Jednačina Ajkonala:</u>

Uvođenjem novih oznaka:

$$\beta_0=\frac{\omega}{c} \quad ; \quad A(x,y,z)=\psi_0 \quad ; \quad n(\vec{r})(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)=S(x,y,z)$$

i ubacivanjem u uopštenu talasnu jednačinu i primenom geometrijske aproksimacije (β jako veliko, teži ∞) dobija se jednačina Ajkonala:

$$(gradS)^2=n^2$$

<u>Osobine dielektrika:</u>

Karakteristike savršenog dielektrika: $\rho_{SL}=0$, $\sigma\to 0\Rightarrow j=0$, $\mu_r\approx 1\Rightarrow \vec{B}=\mu_0\vec{H}$

<u>Stojeći talas:</u>

Mesta na kojima se nalaze čvorovi:

$$\Rightarrow z_n=\frac{n\pi}{\frac{2\pi}{\lambda_0}}\Rightarrow z_n=n\frac{\lambda_0}{2}$$

$z_n=n\dfrac{\lambda_0}{2\cos\theta_i}$, položaji čvorova stojećeg talasa pri kosoj incidenciji

<u>Grupni indeks prelamanja:</u>

$$N=c\frac{d}{d\omega}\left(\frac{n\omega}{c}\right)\Rightarrow N=n+\omega\frac{dn}{d\omega}, \qquad N=n-\lambda\frac{dn}{d\lambda}$$

<u>Veza između grupne i fazne brzine preko talasne dužine svetlosti:</u>

$$v_{gr} = v_f - \lambda \frac{dv_f}{d\lambda}$$

Fresnel-ovi koeficijenti:

TE polarizacija:

$$r^{TE} = \frac{n_1 \cos\theta_i - n_2 \cos\theta_t}{n_1 \cos\theta_i + n_2 \cos\theta_t}$$

$$t^{TE} = \frac{2n_1 \cos\theta_i}{n_1 \cos\theta_i + n_2 \cos\theta_t}$$

Vidimo da je $t^{TE} > 0$ za sve n_1 i n_2, ali kod r^{TE} imamo dva slučaja:

1° $n_2 > n_1 \Rightarrow r^{TE} < 0$, reflektovan talas ima fazu pomerenu za π u odnosu na početni,

2° $n_1 > n_2 \Rightarrow r^{TE} > 0$, nema promene faze reflektovanog talasa u odnosu na početni.

Kako je $t^{TE} > 0$**,** transmitovani talas nikad ne menja fazu u odnosu na ulazni.

TM polarizacija:

$$t^{TM} = \frac{2n_1 \cos\theta_i}{n_2 \cos\theta_i + n_1 \cos\theta_t}$$

$$r^{TM} = \frac{n_2 \cos\theta_i - n_1 \cos\theta_t}{n_2 \cos\theta_i + n_1 \cos\theta_t}$$

$$r^{TM} = \frac{2\sin(\theta_i - \theta_t)\cos(\theta_i + \theta_t)}{2\sin(\theta_i + \theta_t)\cos(\theta_i - \theta_t)} \Rightarrow r^{TM} = \frac{tg(\theta_i - \theta_t)}{tg(\theta_i + \theta_t)}$$

$\theta_B = arctg\frac{n_2}{n_1}$, Brewster-ov ugao

Kompleksni Fresnel-ovi koeficijenti:

$$r^{TE} = \frac{A - jB}{A + jB} \Rightarrow r^{TE} = \left|r^{TE}\right| e^{j2\phi^{TE}},$$

$$\left|r^{TE}\right| = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \phi^{TE} = arctg\frac{B}{A} \Rightarrow \phi^{TE} = arctg\frac{\sqrt{n_1^2 \sin^2\theta_i - n_2^2}}{n_1 \cos\theta_i}.$$

$$r^{TM} = \left|r^{TM}\right| e^{j2\phi^{TM}},$$

$$\phi^{TM} = arctg\frac{\sqrt{n_1^{\,2}\sin^2\theta_i - n_2^{\,2}}}{n_1\cos\theta_i}, \qquad \left|r^{TM}\right| = \left|r^{TE}\right|$$

Evanescentni talas:

$$\delta = \frac{1}{k_2 B} = \frac{1}{k_0 n_2\sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2\sin^2\theta_i - 1}}$$, dubina prodiranja

Reflektansa i Transmitansa:

$$R = \frac{snaga\ reflektovanog\ talasa\ sa\ površi\ A}{snaga\ upadnog\ zračenja\ sa\ površi\ A} \Rightarrow R = \frac{P_r A_{\perp r}}{P_i A_{\perp i}}$$

$$T = \frac{snaga\ transmitovanog\ talasa\ kroz\ površinu\ A}{snaga\ upadnog\ talasa\ na\ površinu\ A}$$

$R + T = 1$, veza između reflektanse i transmitanse

Trigonometrijske transformacije:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$
$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$
$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\tan\alpha \pm \tan\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$
$$\sin\alpha\sin\beta = [\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]/2$$
$$\sin\alpha\cos\beta = [\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)]/2$$
$$\cos\alpha\cos\beta = [\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]/2$$